Dio teorije

§ 9. Druga diferencijalna forma

9.1. Druga diferencijalna ili kvadratna forma plohe

Neka je ploha S zadana svojom vektorskom jednadžbom:

$$\vec{r}(u, v) = x(u, v)\,\vec{i} + y(u, v)\,\vec{j} + z(u, v)\,\vec{k}, \quad (u, v) \in D.$$

Tada se na plohi S definiraju funkcije $L, M, N : D \to \mathbf{R}$ na sljedeći način:

$$\begin{aligned} L &= \vec{N}^0 \cdot \vec{r}_{uu} = \frac{1}{W}\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \ \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}, \ \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u^2}\right), \\ M &= \vec{N}^0 \cdot \vec{r}_{uv} = \frac{1}{W}\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \ \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}, \ \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u \partial v}\right), \\ N &= \vec{N}^0 \cdot \vec{r}_{vv} = \frac{1}{W}\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \ \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}, \ \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial v^2}\right), \end{aligned} \tag{1}$$

odnosno koordinatno:

$$L = \frac{1}{W}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\[2ex] \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2} & \dfrac{\partial^2 y}{\partial u^2} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2} \end{vmatrix}$$

$$M = \frac{1}{W}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\[2ex] \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} & \dfrac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \end{vmatrix} \tag{1*}$$

$$N = \frac{1}{W}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\[2ex] \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 x}{\partial v^2} & \dfrac{\partial^2 y}{\partial v^2} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2} \end{vmatrix}$$

Funkcija L, M i N zovemo *Gaussovim osnovnim (fundamentalnim) veličinama drugog reda* ($W = \sqrt{EG - F^2}$).

a) Neka je nadalje zadana krivulja α na plohi S svojim jednadžbama $u = u(s)$, $v = v(s)$, tj.

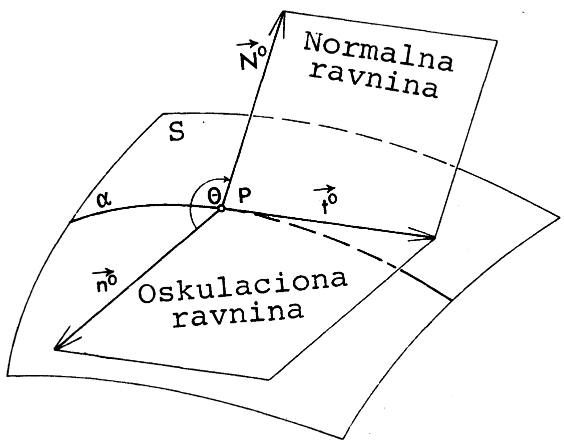
$$\vec{r} = \vec{r}[u(s), \quad v(s)], \tag{2}$$

gdje je s duljina luka krivulje α. Tada vrijedi:

$$\vec{N}^0 \cdot \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = \varkappa \cos\theta, \tag{3}$$

gdje je $\varkappa$ zakrivljenost krivulje α u nekoj točki P, θ kut između orta $\vec{N}^0$ normale na plohu i orta $\vec{n}^0$ glavne normale na krivulju α u točki P (sl. 44).

Relacija (3) dade se napisati u obliku:



Sl. 44.

$$\varkappa \cos\theta = L\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2M\left(\frac{du}{ds}\right)\left(\frac{dv}{ds}\right) + N\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 \equiv \mathrm{II}. \tag{4}$$

Desna strana izraza (4) zove se *druga diferencijalna ili druga kvadratna forma plohe* i označuje s II.

b) Ako je krivulja α na plohi umjesto parametrom s parametrizirana nekim parametrom λ, koji nije duljina luka,

$\vec{r}(\lambda) = \vec{r}(u(\lambda), v(\lambda))$, onda relacija (4) prelazi u:

$$\varkappa \cos\theta = \frac{L\left(\frac{du}{d\lambda}\right)^2 + 2M\left(\frac{du}{d\lambda}\right)\left(\frac{dv}{d\lambda}\right) + N\left(\frac{dv}{d\lambda}\right)^2}{E\left(\frac{du}{d\lambda}\right)^2 + 2F\left(\frac{du}{d\lambda}\right)\left(\frac{dv}{d\lambda}\right) + G\left(\frac{dv}{d\lambda}\right)^2}, \tag{5}$$

odnosno:

$$\varkappa \cos\theta = \frac{L du^2 + 2M du dv + N dv^2}{E du^2 + 2F du dv + G dv^2} \equiv \frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}. \tag{6}$$

Desna strana izraza (6) je kvocijent druge i prve diferencijalne forme plohe.

9.2. Normalni i kosi presjek plohe

Ravnina koja prolazi jednim pravcem tangentne ravnine, tj. smjerom $\vec{t}^0$ ili $\frac{du}{dv}$ i normalom $\vec{N}^0$ na plohu u točki P plohe S siječe ovu plohu u ravninskoj krivulji γ koja se zove *normalni presjek plohe S u točki P u smjeru vektora* t^0.

Svaka druga ravnina koja prolazi istim pravcem (tj. smjerom $\vec{t}^0$) ali ne normalom $\vec{N}^0$ plohe S, siječe ovu plohu u krivulji koja se zove *kosi presjek*.

9.3. Normalna zakrivljenost plohe u danom smjeru

To je zakrivljenost K_n normalnog presjeka u tom smjeru. Normalnoj zakrivljenosti pridružujemo predznak na ovaj način: kut $\theta = 0$ ili π, jer su vektori $\vec{n}^0$ i $\vec{N}^0$ glavne normale normalnog presjeka i normale na plohu kolinearni (istog ili suprotnog smjera). Pri tome uzimamo da je $K_n > 0$ ako je normalni presjek u točki P plohe S zakrivljen prema vektoru $\vec{N}^0$ normale na plohu, a $K_n < 0$ ako je on zakrivljen od vektora $\vec{N}^0$. Pokazuje se da je normalna zakrivljenost u smjeru $\frac{du}{dv}$ dana izrazom (prema (5) ili (6)):

$$K_n = \frac{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2} = \frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}. \tag{7}$$

9.4. Meusnierov teorem

Ovaj teorem povezuje zakrivljenost K_n normalnog i $\varkappa$ kosog presjeka i dan je relacijom:

$$K_n = \varkappa \cos\theta, \tag{8}$$

gdje je θ kut između orta $\vec{N}^0$ normale na plohu i orta $\vec{n}^0$ glavne normale na krivulju α u točki P plohe sa zajedničkom tangentom.

Odavde proizlazi da od svih krivulja na polohi koje prolaze jednom točkom i imaju zajedničku tangentu najmanju zakrivljenost u toj točki ima normalni presjek plohe.

Zakrivljenost plohe definira se pomoću zakrivljenosti krivulja na plohi.

$\frac{1}{K_n}$ i $\frac{1}{\varkappa}$ zovu se radiusi zakrivljenosti normalnog i kosog presjeka.

9.5. Glavne zakrivljenosti. Glavni smjerovi

Neka je zadana ploha S i neka je funkcija normalne zakrivljenosti:

$$K_n(\mu) = \frac{L\mu^2 + 2M\mu + N}{E\mu^2 + 2F\mu + G}, \text{ gdje je } \mu = \frac{du}{dv}. \tag{9}$$

Tada minimalnu i maksimalnu vrijednost te funkcije (ako postoje) zovemo *glavnim zakrivljenostima* plohe S u točki P i označavamo ih sa K_1 i K_2. Smjerovi u kojima te zakrivljenosti dolaze zovu se *glavni smjerovi* u točki P i označujemo ih sa μ_1 i μ_2. Glavne zakrivljenosti u točki P plohe S jesu korijeni K_1 i K_2 kvadratne jednadžbe:

$$K_n^2 - \frac{EN - 2FM + LG}{EG - F^2} K_n + \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = 0. \tag{10}$$

Glavne zakrivljenosti dobiju se kao ekstremne vrijednosti funkcije (9), tj. kao ekstremne vrijednosti funkcije:

$$F(\mu) \equiv K_n(E\mu^2 + 2F\mu + G) - (L\mu^2 + 2M\mu + N) = 0, \tag{11}$$

gdje je $\mu = \dfrac{du}{dv}$.

Veličine $\dfrac{1}{K_1}$ i $\dfrac{1}{K_2}$ zovu se glavni polumjeri zakrivljenosti.

Glavni smjerovi μ_1 i μ_2 plohe S u točki P dobiju se također kao ekstremne vrijednosti funkcije (10) (eliminiravši pri računanju K_n).

Glavni smjerovi μ_1 i μ_2 su prema tome korijeni kvadratne jednadžbe:

$$\begin{vmatrix} \mu^2 & -\mu & 1 \\ G & F & E \\ N & M & L \end{vmatrix} = 0 \tag{12}$$

u točki P plohe S.

9.6. Eulerov poučak. Dupinova indikatrisa. Rodriguesov teorem

a) *Eulerov poučak* glasi:

$$K_n = K_1 \cos^2\alpha + K_2 \sin^2\alpha. \tag{13}$$

Pomoću tog poučka možemo izračunati normalnu zakrivljenost K_n pomoću glavnih zakrivljenosti K_1 i K_2 i pomoću kuta α. Pritom je α kut što ga zatvara vektor tangente normalnog presjeka i glavni smjer u točki P plohe S.

b) *Rodriguesov teorem* je specijalni slučaj Eulerove formule u slučaju da je vektor tangente normalnog presjeka u točki P ujedno glavni smjer, a glasi:

$$d\vec{N}^0 = -K_n\, d\vec{r}, \tag{14}$$

gdje je $\vec{N}^0$ ort normale na plohu S u točki P.

c) Eulerovu formulu možemo interpretirati geometrijski. Uočimo na plohi S normalni presjek u točki P plohe S i u njoj tangencijalnu ravninu. Na tangenti normalnog presjeka u točki P uočimo točku T takvu da je $\overline{PT} = \sqrt{\frac{1}{|K_n|}}$. Skup tako dobivenih točaka T u tangencijalnoj ravnini zove se *Dupinova indikatrisa plohe S u točki P.* Pokazuje se da je Dupinova indikatrisa konika koja leži u tangencijalnoj ravnini u točki P plohe S, da joj je središte u točki P i (prema (13)) ukoliko se parametarska mreža podudara s mrežom krivulja zakrivljenosti (vidi § 9.9) ona ima jednadžbu:

$$K_1 x^2 + K_2 y^2 = \pm 1, \text{ (vidi sl. 45)} \tag{15}$$

gdje je:

$$x = \sqrt{\frac{1}{|K_n|}} \cos \alpha,$$

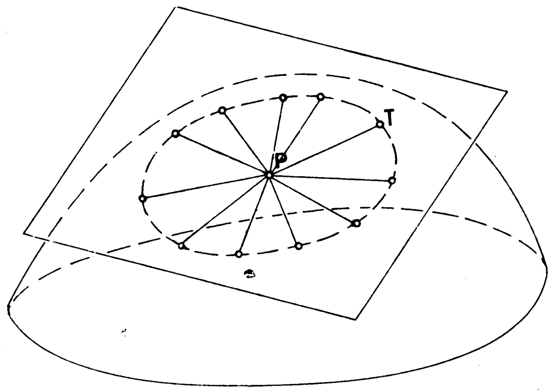
$$y = \sqrt{\frac{1}{|K_n|}} \sin \alpha,$$

a koordinate osi x i y su tangente na glavne krivulje zakrivljenosti, ishodište koordinatnog sustava je u točki P.

Prema (7) Dupinova indikatrisa ima jednadžbu:

$$Lx^2 + 2Mxy + Ny^2 = \pm 1,$$

gdje je točka P ishodište koordinatnog sustava u tangencijalnoj ravnini s osima koje se poklapaju sa $\vec{r}_u$ i $\vec{r}_v$.



Sl. 45.

9.7. Gaussova zakrivljenost. Srednja zakrivljenost

a) Gaussova (potpuna ili totalna) zakrivljenost K plohe S u točki P je funkcija $K: S \to \mathbf{R}$ definirana formulom (vidi (10)):

$$K = K_1 K_2 = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}. \tag{16}$$

Kako je $EG - F^2 = |\vec{r}_u \times \vec{r}_v|^2$ (vidi (§ 8.4) uvijek pozitivno, to će predznak od K ovisiti jedino o predznaku od $LN - M^2$.

b) Srednja zakrivljenost H plohe S u točki P je funkcija $H: S \to \mathbf{R}$ definirana formulom (vidi (10)):

$$H = \frac{K_1 + K_2}{2} = \frac{EN - 2FM + LG}{2(EG - F^2)}. \tag{17}$$

c) Glavne zakrivljenosti K_1 i K_2 u točki P plohe S osim po (10) i (11) mogu se računati i ovako.

Budući da je prema (16) i (17):

$$K = K_1 K_2,$$

$$H = \frac{1}{2}(K_1 + K_2),$$

to su K_1 i K_2 po Vietovim formulama korijeni kvadratne jednadžbe:

$$x^2 - 2Kx + K = 0, \tag{18}$$

dakle:

$$K_{1,2} = H \pm \sqrt{H^2 - K}. \tag{19}$$

d) Plohe kod kojih je srednja zakrivljenost u svakoj točki jednaka nuli, tj. $H = 0$ zovu se *minimalne plohe.* Plohe kod kojih je Gaussova zakrivljenost u svakoj točki konstantna zovemo *plohe s konstantnom zakrivljenosti.* Takve su *kugla* s $K = \text{const.} > 0$ i pseudosfera s $K = \text{const.} < 0$ (vidi zad. 341. i 322).

9.8. Pravčaste i razvojne plohe

Ploha S je *pravčasta* ako za svaku njenu točku P postoji bar jedan pravac p takav da on leži na plohi. Ploha S je *razvojna* ako je za sve točke $P \in S$ totalna ili Gaussova zakrivljenost $K(P) = 0$. Pravčasta ploha koja nije razvojna zove se *vitopera pravčasta ploha.*

Svaka razvojna ploha je pravčasta, i to ili stožasta ili valjkasta ploha ili tangentna ploha prostorne krivulje. Vitopere plohe su npr. jednokrilni hiperboloid, hiperbolički paraboloid i helikoid. Svaka razvojna ploha dade se izometrički preslikati u ravninu, tj. razviti u ravninu (vidi § 11.1.b). Odatle i naziv razvojna ploha.

9.9. Glavne krivulje zakrivljenosti

Krivulje zakrivljenosti plohe S su one krivulje na plohi čija je tangenta u svakoj točki paralelna s jednim od dva glavna smjera μ_1 i μ_2. Krivulje zakrivljenosti $v = v(u)$ dobiju se rješavanjem diferencijalne jednadžbe:

$$\begin{vmatrix} \mathrm{d}u^2 & -\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v & \mathrm{d}v^2 \\ G & F & E \\ N & M & L \end{vmatrix} = 0. \tag{20}$$

Krivulje zakrivljenosti na plohi S tvore ortogonalnu mrežu na toj plohi (vidi zad. 298).

Koordinatne u i v krivulje na plohi S su ujedno i krivulje zakrivljenosti na plohi S onda i samo onda ako u svakoj točki plohe vrijedi:

$$F=0 \quad \text{i} \quad M=0. \tag{21}$$

Ovo proizlazi iz jednadžbe (20) za $\mathrm{d}u=0$ i $\mathrm{d}v=0$ i $F=0$.

9.10. Asimptotske linije. Asimptotski smjerovi

a) *Asimptotski smjer* (pravac) je takav smjer $\bar{\mu}=\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}$ u kojem je normalna zakrivljenost K_n jednaka nuli i dobiva se kao rješenje jednadžbe:

$$L\mu^2+2M\mu+N=0. \tag{22}$$

b) Krivulja na plohi zove se *asimptotska linija,* ako je smjer u svakoj njenoj točki asimptotski smjer. U svakoj točki asimptotske linije je $K_n=0$, pa diferencijalna jednadžba asimptotskih linija glasi:

$$L\,\mathrm{d}u^2+2M\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v+N\,\mathrm{d}v^2=0. \tag{23}$$

Asimptotska linija je ujedno ona krivulja na plohi kod koje se tangencijalna ravnina plohe podudara u svakoj točki s oskulacionom ravninom te krivulje. Tada glavna normala $\vec{n}^0$ asimptotske linije čini s normalom na plohu $\vec{N}^0$ kut $\theta=\dfrac{\pi}{2}$, pa je zbog (8) $K_n=0$ (vidi zad. 387).

9.11. Klasifikacija točaka na plohi. Kružne, eliptičke, hiperboličke, paraboličke točke plohe

Oblik plohe u okolini neke točke P plohe S ovisit će o tipu točke na plohi. Da bismo objasnili što pod time razumijevamo promatrat ćemo u točki P predznak izraza $LN-M^2$ koji je u vezi s normalnom zakrivljenosti K_n (formula (7)). Naime, predznak od K_n ovisi samo o brojniku, jer je nazivnik uvijek pozitivan. M^2-LN je diskriminanta brojnika u formuli (7). Predznak od $LN-M^2$ još je u vezi s glavnim zakrivljenostima (formula (10)), te s Gaussovom zakrivljenosti (formula (16)).

a) *Kružna (ili sferna ili ombilička) točka plohe* je takva točka plohe za koju vrijedi:

$$L:M:N=E:F:G. \tag{24}$$

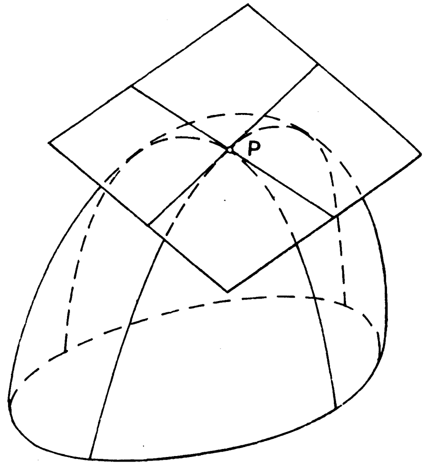
U toj je točki normalna zakrivljenost $K_n=\text{const}$. Kružna točka je specijalan slučaj eliptičke. U kružnoj točki svaki smjer μ je ujedno i glavni smjer. Tada je, naime, lijeva strana od (12) identički jednaka nuli, pa (12) zadovoljava svaki μ. Gaussova je zakrivljenost $K>0$ u kružnoj točki. Dupinova indikatrisa je u kružnoj točki kružnica ($K_1=K_2$ u (15)). U okolini kružne točke ploha leži sva s jedne strane tangentne ravnine.

Na sferi je svaka točka kružna.

b) *Eliptička točka plohe* (sl. 46) je takva točka plohe za koju je:

$$LN - M^2 > 0. \tag{25}$$

U takvoj točki normalna zakrivljenost K_n u formuli (7) ne mijenja predznak mijenjanjem $\mu = \frac{du}{dv}$. To znači da u okolini oko eliptičke točke ploha leži sva s jedne strane tangentne ravnine. U eliptičkoj točki postoje dva realna glavna smjera i dvije krivulje zakrivljenosti, koje su međusobno okomite (vidi (12) i (20)). Gaussova zakrivljenost je $K > 0$ (zbog (16) i (25)), pa zbog toga za glavne zakrivljenosti vrijedi:



Sl. 46.

$$\operatorname{sign} K_1 = \operatorname{sign} K_2.$$

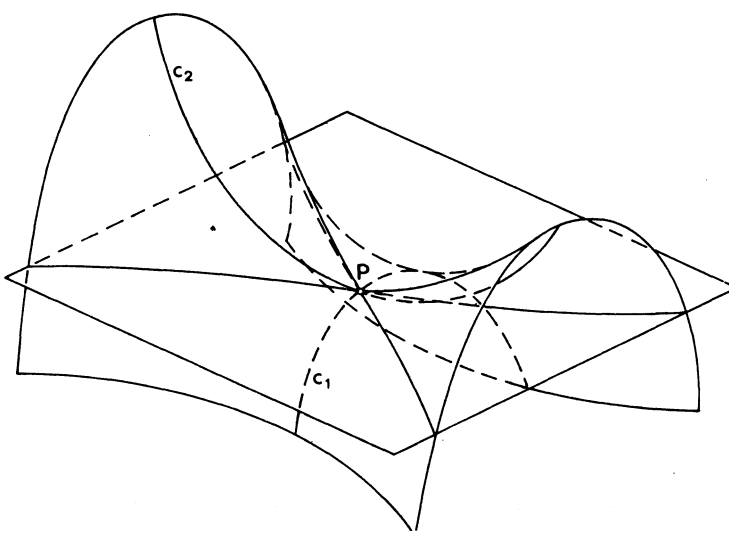
Zbog istog predznaka od K_1 i K_2 Dupinova indikatrisa je u eliptičkoj točki elipsa.

Sve točke elipsoida su eliptičke. Eliptičke točke su još točke na eliptičkom paraboloidu, eliptičkom hiperboloidu i na dvokrilnom (dvoplošnom) hiperboloidu.

c) *Hiperbolička točka plohe* (sl. 47) je takva točka plohe za koju je:

$$LN - M^2 < 0. \tag{26}$$

U takvoj točki normalna zakrivljenost K_n u formuli (7) mijenja predznak mijenjanjem μ.



Sl. 47.

Stoga je $K_n = 0$ za dva smjera $\bar{\mu}_1$ i $\bar{\mu}_2$. To su asimptotski smjerovi. U hiperboličkoj točki plohe prema tome postoje *dva asimptotska smjera* (u eliptičkoj i kružnoj točki nema asimptotskih smjerova). To znači da asimptotski smjerovi $\bar{\mu}_1$ i $\bar{\mu}_2$ rastavljaju okolinu hiperboličke točke na četiri dijela: dva nasuprotna ispod, a dva preostala nasuprotna iznad tangencijalne ravnine. U hiperboličkoj točki postoje dva realna glavna smjera (diskriminanta jednadžbe (12) je pozitivna) i dvije međusobno okomite krivulje zakrivljenosti. Gaussova zakrivljenost je $K < 0$ (zbog (16) i (26)), pa za hiperboličke točke vrijedi:

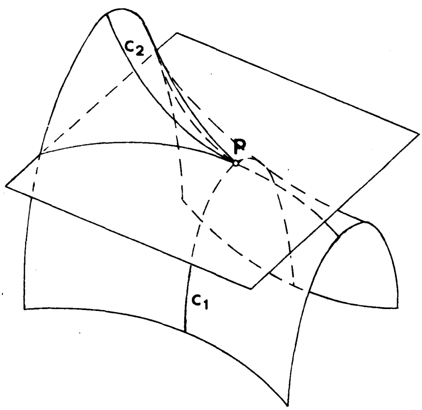
$$\operatorname{sign} K_1 = -\operatorname{sign} K_2.$$

Zbog protivnog predznaka od K_1 i K_2 Dupinova indikatrisa je u hiperboličkoj točki par konjugiranih hiperbola. Sve točke jednokrilnog hiperboloida su hiperboličke (vidi zad. 207. i 229). Točke hiperboličkog paraboloida su hiperboličke.

d) *Parabolička točka plohe* (sl. 48) je takva točka plohe za koju je:

$$LN - M^2 = 0. \tag{27}$$

U takvoj točki normalna zakrivljenost K_n ne mijenja predznak mijenjanjem μ.
Gaussova zakrivljenost $K = 0$, pa je barem jedna od glavnih zakrivljenosti jednaka nuli ($K = K_1 K_2 = 0 \Rightarrow K_1 = 0$ ili $K_2 = 0$ ili oboje).

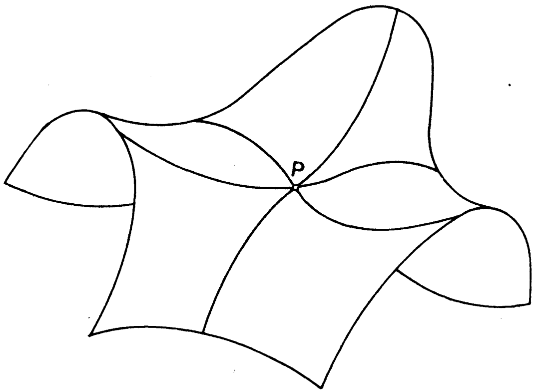


Sl. 48.

Ograničimo se najprije na slučaj $K_1 = 0$, $K_2 \neq 0$ (ili obratno).
Dvostruka vrijednost μ_0 kojoj pripada normalna zakrivljenost $K_n = K_1$ je, dakle, istovremeno i asimptotski i glavni smjer. To je ujedno i jedini asimptotski smjer, a glavni smjer postoji upravo još jedan koji je okomit na njega i kome pripada normalna zakrivljenost K_2.

Stoga takvom točkom prolaze dvije međusobno ortogonalne krivulje zakrivljenosti. Dupinova indikatrisa raspada se na dva paralelna pravca. Sve točke valjka i stošca su paraboličke. Točke torusa koje leže na najvišoj i najnižoj kružnici (vidi sl. 42, str. 111) također su paraboličke. Vrlo je čest slučaj da krivulja na plohi koja se sastoji od paraboličkih točaka razdvaja područje hiperboličkih od područja eliptičkih točaka (vidi zad. 394).

e) Specijalni slučaj paraboličke točke kada je $K_1 = K_2 = 0$ naziva se *ravninskom točkom* ili *točkom spljoštenosti*. Jasno je da je svaki smjer glavni, a ujedno i asimptotski. Jednostavan primjer je ravnina kod koje je svaka točka ravninska. U ravnini je čak i svaka krivulja, krivulja zakrivljenosti. Međutim, okolina ravninske točke može biti i veoma komplicirana, kao što pokazuje primjer majmunskog sedla koje ima jednu jedinu ravninsku točku P (vidi sl. 49. na kojoj su prikazane i *tri* krivulje zakrivljenosti koje prolaze točkom P).



Sl. 49.

Izabrani zadaci za vježbu
(iz lekcije "Druga diferencijalna forma")

316. Naći drugu kvadratnu formu za zavojnu plohu (helikoid):

$$x = au\cos v,\ y = au\sin v,\ z = bv,\ u, v \in \mathbf{R}.\ \text{(Vidi zad. 220.)}$$

Vektorska jednadžba plohe glasi:

$$\vec{r} = au\cos v\,\vec{i} + au\sin v\,\vec{j} + bv\,\vec{k}.$$

Tada su Gaussove veličine prvoga reda:

$$E = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\right)^2 = (a\cos v)^2 + (a\sin v)^2 + (0)^2 = a^2,$$

$$G = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right)^2 = (au\sin v)^2 + (au\cos v)^2 + (\mathrm{b})^2 = a^2u^2 + b^2,$$

$$F = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\cdot\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = -\ a^2u\sin v\cos v + a^2u\sin v\cos u + 0\cdot b = 0,$$

a diskriminanta prve kvadratne forme

$$W^2 = EG - F^2 = (a^2u^2 + b^2)\,a^2.$$

Kako su Gaussove veličine drugoga reda dane s:

$$L = \frac{1}{W}\,(\dot{\vec{r}}_u,\ \dot{\vec{r}}_v,\ \ddot{\vec{r}}_{uu}),\quad M = \frac{1}{W}\,(\dot{\vec{r}}_u,\ \dot{\vec{r}}_v,\ \ddot{\vec{r}}_{uv}),\quad N = \frac{1}{W}\,(\dot{\vec{r}}_u,\ \dot{\vec{r}}_v,\ \ddot{\vec{r}}_{vv}),$$

to računajmo mješovite produkte:

$$(\dot{\vec{r}}_u, \dot{\vec{r}}_v, \ddot{\vec{r}}_{uu}) = \begin{vmatrix} a\cos v & a\sin v & 0 \\ -au\sin v & au\cos v & b \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(\dot{\vec{r}}_u, \dot{\vec{r}}_v, \ddot{\vec{r}}_{uv}) = \begin{vmatrix} a\cos v & a\sin v & 0 \\ -au\sin v & au\cos v & b \\ -a\sin v & a\cos v & 0 \end{vmatrix} = -a^2 b,$$

$$(\dot{\vec{r}}_u, \dot{\vec{r}}_v, \ddot{\vec{r}}_{vv}) = \begin{vmatrix} a\cos v & a\sin v & 0 \\ -au\sin v & au\cos v & b \\ -au\cos v & -au\sin v & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Dakle je $L = 0, \quad M = -\dfrac{ab}{\sqrt{a^2u^2+b^2}}, \quad N = 0,$

pa druga diferencijalna forma helikoida glasi:

$$\mathrm{II} \equiv -\frac{2ab}{\sqrt{a^2u^2+b^2}}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

317. Pokazati:

1° da je druga kvadratna forma ravnine identički jednaka nuli.

2° da je druga kvadratna forma sfere proporcionalna prvoj.

1° Prema zad. 216. parametarske jednadžbe ravnine glase:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + l_1 u + l_2 v \\ y &= y_0 + m_1 u + m_2 v \\ z &= z_0 + n_1 u + n_2 v \quad u, v \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

Kako je:

$$\ddot{\vec{r}}_{uu} = 0, \quad \ddot{\vec{r}}_{uv} = 0, \quad \ddot{\vec{r}}_{vv} = 0$$

to je i

$$L = \frac{1}{W}(\dot{\vec{r}}_u, \dot{\vec{r}}_v, \ddot{\vec{r}}_{uu}) = 0, \; M = \frac{1}{W}(\dot{\vec{r}}_u, \dot{\vec{r}}_v, \ddot{\vec{r}}_{uv}) = 0,$$
$$N = \frac{1}{W}(\dot{\vec{r}}_u, \dot{\vec{r}}_v, \ddot{\vec{r}}_{vv}) = 0,$$

pa je druga kvadratna forma identički jednaka nuli, tj.:

$$\mathrm{II} \equiv 0.$$

(Vidi zad. 267.)

2° Prema zad. 204. i 266. vektorska jednadžba sfere glasi:

$$\vec{r} = \{ r\cos\phi\sin\theta,\ r\sin\phi\sin\theta,\ r\cos\theta \},\ \phi \in [0,2\pi],\ \theta \in [0,\pi],$$

a Gaussove veličine prvog reda:

$$E = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi}\right)^2 = r^2\sin^2\theta, \quad G = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}\right)^2 = r^2, \quad F = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi}\cdot\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = 0,$$

pa je prva diferencijalna forma dana s:

$$I = r^2\sin^2\theta\,\mathrm{d}\phi^2 + r^2\,\mathrm{d}\theta^2.$$

Jer je $W^2 = EG - F^2 = r^4\sin^2\theta$, to su koeficijenti druge kvadratne forme redom:

$$L = \frac{1}{W}(\dot{\vec{r}}_\phi, \dot{\vec{r}}_\theta, \ddot{\vec{r}}_{\phi\phi}) = \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} -r\sin\phi\sin\theta & r\cos\phi\sin\theta & 0 \\ r\cos\phi\cos\theta & r\sin\phi\cos\theta & -r\sin\theta \\ -r\cos\phi\sin\theta & -r\sin\phi\sin\theta & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{r\sin\theta}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} -r\sin\phi\sin\theta & r\cos\phi\sin\theta \\ -r\cos\phi\sin\theta & -r\sin\phi\sin\theta \end{vmatrix} = r\sin^2\theta.$$

$$M = \frac{1}{W}(\dot{\vec{r}}_\phi, \dot{\vec{r}}_\theta, \ddot{\vec{r}}_{\phi\theta}) = \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} -r\sin\phi\sin\theta & r\cos\phi\sin\theta & 0 \\ r\cos\phi\cos\theta & r\sin\phi\cos\theta & -r\sin\theta \\ -r\sin\phi\cos\theta & -r\cos\phi\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

$$N = \frac{1}{W}(\dot{\vec{r}}_\phi, \dot{\vec{r}}_\theta, \ddot{\vec{r}}_{\theta\theta}) = \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} -r\sin\phi\sin\theta & r\cos\phi\sin\theta & 0 \\ r\cos\phi\cos\theta & r\sin\phi\cos\theta & -r\sin\theta \\ -r\cos\phi\sin\theta & -r\sin\phi\sin\theta & -r\cos\theta \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{r^3}{r^2\sin\theta}(\sin^2\phi\sin\theta\cos^2\theta + \cos^2\phi\sin^3\theta + \sin^2\phi\sin^3\theta +$$
$$+ \cos^2\phi\sin\theta\cos^2\theta) = r.$$

Druga diferencijalna forma dakle glasi:

$$\mathrm{II} = r\sin^2\theta\,\mathrm{d}\phi^2 + r\,\mathrm{d}\theta^2,$$

pa je zaista:

$$\mathrm{I} = r\,\mathrm{II}.$$

318. Naći drugu diferencijalnu formu plohe zadane jednadžbom:

$$z = f(x, y).$$

Prema zad. 214. i 270. imamo:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + f(x, y)\vec{k},$$
$$E = 1 + p^2, \quad G = 1 + q^2, \quad F = p\cdot q,$$
$$W^2 = EG - F^2 = (1+p^2)\ (1+q^2) - p^2q^2 = 1 + p^2 + q^2.$$

Gaussove veličine drugog reda jesu:

$$L = \frac{1}{W}(\dot{\vec{r}}_x, \dot{\vec{r}}_y, \ddot{\vec{r}}_{xx}) = \frac{1}{W}\begin{vmatrix} 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & q \\ 0 & 0 & r \end{vmatrix} = \frac{r}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

$$M = \frac{1}{W}(\dot{\vec{r}}_x, \dot{\vec{r}}_y, \ddot{\vec{r}}_{xy}) = \frac{1}{W}\begin{vmatrix} 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & q \\ 0 & 0 & s \end{vmatrix} = \frac{s}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

$$N = \frac{1}{W}(\dot{\vec{r}}_x, \dot{\vec{r}}_y, \ddot{\vec{r}}_{yy}) = \frac{1}{W}\begin{vmatrix} 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & q \\ 0 & 0 & t \end{vmatrix} = \frac{t}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

gdje su prema § 7. $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$; $r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ i $t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

Druga diferencijalna forma, dakle, glasi:

$$\mathrm{II} = \frac{r\,\mathrm{d}x^2 + 2s\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + t\,\mathrm{d}y^2}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

319. Naći drugu kvadratnu formu za rotacionu plohu (vidi zad. 215):

$$\vec{r} = \{\phi(u)\cos v, \phi(u)\sin v, \psi(u)\}.$$

Kako je prema zad. 268:

$$E = \phi'^2 + \psi'^2, \quad F = 0, \quad G = \phi^2,$$
$$W^2 = EG - F^2 = \phi^2(\phi'^2 + \psi'^2),$$

tamo imamo dalje:

$$L = \frac{1}{W}(\dot{\vec{r}}_u, \dot{\vec{r}}_v, \ddot{\vec{r}}_{uu}) = \frac{1}{W}\begin{vmatrix} \phi'\cos & \phi'\sin v & \psi' \\ -\phi\sin v & \phi\cos v & 0 \\ \phi''\cos v & \phi''\sin v & \psi'' \end{vmatrix};$$

$$L = \frac{\phi' \psi'' - \phi'' \psi'}{\sqrt{\phi'^2 + \psi'^2}}.$$

$$M = \frac{1}{W}(\dot{\vec{r}}_u, \dot{\vec{r}}_v, \ddot{\vec{r}}_{uv}) = \frac{1}{W} \begin{vmatrix} \phi' \cos & \phi' \sin v & \psi' \\ -\phi \sin v & \phi \cos v & 0 \\ -\phi' \sin v & -\phi' \cos v & 0 \end{vmatrix};$$

$M = 0.$

$$N = \frac{1}{W}(\dot{\vec{r}}_u, \dot{\vec{r}}_v, \ddot{\vec{r}}_{vv}) = \frac{1}{W} \begin{vmatrix} \phi' \cos & \phi' \sin v & \psi' \\ -\phi \sin v & \phi \cos v & 0 \\ -\phi \cos v & -\phi \sin v & 0 \end{vmatrix};$$

$$N = \frac{\phi \psi'}{\sqrt{\phi'^2 + \psi'^2}}.$$

Druga diferencijalna forma glasi:

$$\mathrm{II} = \frac{(\phi' \psi'' - \phi'' \psi')\, \mathrm{d}u^2 + \phi \psi' \, \mathrm{d}v^2}{\sqrt{\phi'^2 + \psi'^2}}.$$

320. Zadana je zavojna ploha (helikoid).

$$x = au \cos v, \quad y = au \sin v, \quad z = mv, \quad u,\ v \in \mathbf{R}.$$

1° Naći normalnu zakrivljenost helikoida.
2° Naći glavne, Gaussovu i srednju zakrivljenost, te ispitati vrstu točaka na helikoidu.
3° Naći glavne smjerove helikoida.
4° Naći (glavne) krivulje zakrivljenosti helikoida.

1° Kako je (vidi zad. 220, 288 i 316):

$$E = a^2, \quad G = a^2 u^2 + m^2, \quad F = 0$$

$$L = 0, \quad N = 0, \qquad M = -\frac{am}{\sqrt{a^2 u^2 + m^2}},$$

to je normalna zakrivljenost prema (7) iz § 9:

$$K_n = \frac{L \mathrm{d}u^2 + 2M \mathrm{d}u \mathrm{d}v + N \mathrm{d}v^2}{E \mathrm{d}u^2 + 2F \mathrm{d}u \mathrm{d}v + G \mathrm{d}v^2},$$

odnosno:

$$K_n = \frac{-\dfrac{2am}{\sqrt{a^2 u^2 + m^2}} \mathrm{d}u \mathrm{d}v}{a^2 \mathrm{d}u^2 + (a^2 u^2 + m^2)\, \mathrm{d}v^2}.$$

2° Glavne zakrivljenosti naći ćemo kao ekstremne vrijednosti funkcije:

$$K_n = \frac{-\dfrac{2am}{\sqrt{a^2u^2+m^2}}\mu}{a^2\mu^2+(a^2u^2+m^2)}, \quad \mu = \frac{du}{dv}$$

u implicitnom obliku:

$$F(\mu) \equiv K_n a^2 \mu^2 + \frac{2am}{\sqrt{a^2u^2+m^2}}\mu + K_n(a^2u^2+m^2) = 0.$$

Potražimo ekstrem:

$$\frac{\partial F}{\partial \mu} = 2K_n a^2 \mu + \frac{2am}{\sqrt{a^2u^2+m^2}} = 0.$$

Eliminiramo li iz posljednje dvije jednadžbe μ dobit ćemo jednadžbu:

$$K_n^2 = \frac{m^2}{(a^2u^2+m^2)^2},$$

čija rješenja predstavljaju glavne zakrivljenosti:

$$K_{1,2} = \pm \frac{m}{a^2u^2+m^2}.$$

Drugi način računanja glavnih zakrivljenosti je pomoću (18) i (19). Kako je prema (16):

$$K = \frac{LN-M^2}{EG-F^2} = -\frac{m^2}{(a^2u^2+m^2)},$$

a prema (17):

$$H = \frac{EN-2FM+LG}{2(EG-F^2)} = 0,$$

to glavne zakrivljenosti dobijemo kao rješenja kvadratne jednadžbe:

$$x^2 - 2Hx + K = 0,$$

odnosno:

$$x^2 = \frac{m^2}{a^2u^2+m^2}, \text{ tj.}$$

$$K_{1,2} = \pm \frac{m}{a^2u^2+m^2}.$$

Točke na helikoidu su hiperboličke, jer je sign $K_1 = -\operatorname{sign} K_2$.

Gaussova zakrivljenost jest:

$$K = K_1 K_2 = -\frac{m^2}{(a^2u^2+m^2)^2}.$$

Vidimo da je Gaussova zakrivljenost negativna, što je također karaktristika hiperboličkih točaka.

Srednja zakrivljenost jest:

$$H = \frac{K_1 + K_2}{2} = 0.$$

Helikoid je, prema tome, minimalna ploha.

3° Glavne smjerove dobit ćemo kao rješenja jednadžbe:

$$\begin{vmatrix} \mu^2 & -\mu & 1 \\ G & F & E \\ N & M & L \end{vmatrix} = 0,$$

odnosno:

$$\begin{vmatrix} \mu^2 & -\mu & 1 \\ a^2u^2 + m^2 & 0 & a^2 \\ 0 & -\dfrac{am}{\sqrt{a^2u^2+m^2}} & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

ili:

$$a^2 m\mu^2 = m(a^2u^2 + m^2),$$

čija rješenja jesu glavni smjerovi:

$$\mu_{1,2} = \pm \frac{1}{a}\sqrt{a^2u^2 + m^2}.$$

Drugi način:

Glavne smjerove helikoida dobit ćemo kao ekstremne vrijednosti funkcije:

$$F(\mu) = K_n a^2 \mu^2 + \frac{2ma}{\sqrt{a^2u^2+m^2}}\,\mu + K_n(a^2u^2 + m^2) = 0.$$

Odavde je:

$$\frac{\partial F}{\partial \mu} = 2K_n a^2 \mu + \frac{2ma}{\sqrt{a^2u^2+m^2}} = 0.$$

Eliminiramo li iz gornje dvije jednadžbe K_n, dobijemo glavne smjerove.

4° (Glavne) krivulje zakrivljenosti dobit ćemo rješenjem diferencijalne jednadžbe:

$$\begin{vmatrix} du^2 & -du\,dv & dv^2 \\ G & F & E \\ N & M & L \end{vmatrix} = 0,$$

odnosno:

$$\begin{vmatrix} du^2 & -du\,dv & dv^2 \\ a^2u^2+m^2 & 0 & a^2 \\ 0 & -\dfrac{am}{\sqrt{a^2u^2+m^2}} & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

ili:

$$\frac{du}{dv} = \pm\frac{1}{a}\sqrt{a^2u^2+m^2}.$$

Rješenje dobijemo separacijom varijabli:

$$dv = \pm\frac{a\,du}{\sqrt{a^2u^2+m^2}}.$$

Krivulje zakrivljenosti, prema tome, glase:

$$v = C \pm \ln\left(au+\sqrt{a^2u^2+m^2}\right).$$

Do iste diferencijalne jednadžbe doći ćemo iz glavnih smjerova:

$$\mu = \pm\frac{1}{a}\sqrt{a^2u^2+m^2}$$

stavivši da je $\mu = \dfrac{du}{dv}$.

S obzirom da je helikoid ploha u kojoj leže glavne normale na zavojnicu valjka (zad. 151) to je helikoid pravčasta ploha.
Helikoid nije razvojna ploha, jer preama 2° Gaussova zakrivljenost nije jednaka nuli (vidi § 9.8. i § 11.1).

321. Naći normalnu, Gaussovu i srednju zakrivljenost plohe zadane u obliku:

$$z = f(x, y),$$

te provesti diskusiju u vezi s vrstom točaka na plohi.

Kako je prema zad. 214, 270 i 318:

$$E = 1+p^2, \quad G = 1+q^2, \quad F = pq, \quad W^2 = 1+p^2+q^2,$$

$$L = \frac{r}{W}, \quad N = \frac{t}{W}, \quad M = \frac{s}{W},$$

to je normalna zakrivljenost:

$$K_n = \frac{r\mu^2 + 2s\mu + t}{W[(1+p^2)\mu^2 + 2pq\mu + (1+q^2)]}, \quad \mu = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}.$$

Potražimo glavne zakrivljenosti pomoću ekstrema funkcije:

$$F(\mu) = [K_n W(1+p^2) - r]\mu^2 + [2pqWK_n - 2s]\mu + \\ + [K_n W(1+q^2) - t] = 0. \tag{1}$$

Imamo:

$$\frac{\partial F}{\partial \mu} = 2[K_n W(1+p^2) - r]\mu + 2[pqWK_n - s] = 0. \tag{2}$$

Eliminiranjem μ iz (1) i (2) dobit ćemo kvadratnu jednadžbu po K_n.
Postupit ćemo ovako: pomnožimo (2) s $\frac{\mu}{2}$ i tako dobivenu jednadžbu oduzmemo od (1). Na taj način umjesto sustava (1) i (2) dobijemo sustav jednadžbi:

$$[K_n W(1+p^2) - r]\mu + [pqWK_n - s] = 0, \tag{2}$$

$$[pqWK_n - s]\mu \qquad + [K_n W(1+q^2) - t] = 0. \tag{3}$$

Nuždan i dovoljan uvjet da bi sustav (2) i (3) imao rješenja jest:

$$\begin{vmatrix} K_n W(1+p^2) - r & pqWK_n - s \\ pqWK_n - s & K_n W(1+q^2) - t \end{vmatrix} = 0.$$

Dobijemo:

$$K_n^2[W^2 + W^2p^2 + W^2q^2] - K_n W[(1+p^2)t - 2spq + (1+q^2)r] + rt - s^2 = 0.$$

Glavne zakrivljenosti koje nas posebno ne zanimaju dobivamo, dakle, kao rješenja kvadratne jednadžbe po K_n:

$$K_n^2 - K_n \frac{W}{W^4}[(1+p^2)t - 2spq + (1+q^2)r] + \frac{rt - s^2}{W^4} = 0.$$

Odavde, međutim, po Vietovim formulama možemo direktno očitati Gaussovu zakrivljenost:

$$K = K_1 K_2 = \frac{rt - s^2}{(1+p^2+q^2)^2}$$

i srednju zakrivljenost:

$$H = \frac{K_1 + K_2}{2} = \frac{1}{2}\,\frac{(1+p^2)t - 2spq + (1+q^2)r}{(1+p^2+q^2)^{3/2}}.$$

Vrsta točaka na plohi ovisit će o predznaku Gaussove zakrivljenosti:

$$K=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}=\frac{rt-s^2}{W^2}.$$

Kako je $EG-F^2=W^2>0$ to će predznak od K ovisiti o predznaku brojnika $LN-M^2$, odnosno $rt-s^2$.

1. U eliptičkim i kružnim točkama uvijek je $K>0$, pa se nejednakost $LN-M^2>0$ svodi na:

$$rt-s^2>0.$$

2. U hiperboličkim točkama plohe je $K<0$, pa se nejednakost $LN-M^2<0$ svodi na

$$rt-s^2<0.$$

3. U paraboličkim točkama plohe je $K=0$, pa se jednakost $LN-M^2=0$ svodi na:

$$rt-s^2=0.$$

Povežimo ove rezultate s ispitivanjem ekstrema funkcije $z=f(x, y)$. Dovoljan uvjet za ekstrem bio je upravo $rt-s^2>0$. Jasno je, dakle, da će ekstremi sigurno postojati u kružnim i eliptičkim stacionarnim točkama, dok za paraboličke točke nema odluke o postojanju ekstrema bez dodatne diskusije, a u hioperboličkim točkama ne postoje ekstremi.

Ovdje je:

$$p=z_x,\quad q=z_y,\quad r=z_{xx},\quad s=z_{xy},\quad t=z_{yy}.$$

322. Pokazati da je Gaussova zakrivljenost pseudosfere konstantna i negativna. Ispitati vrstu točaka i naći krivulje zakrivljenosti.

Prema zad. 219. jednadžba pseudosfere glasi:

$$y=a\ln\frac{a+\sqrt{a^2-(x^2+z^2)}}{\sqrt{x^2+z^2}}-\sqrt{a^2-(x^2+z^2)},$$

Odnosno u vektorskom obliku:

$$\vec{r}=a\cos v\sin u\,\vec{i}-a\left[\ln\operatorname{tg}\frac{u}{2}+\cos u\right]\vec{j}+a\sin v\sin u\,\vec{k}.$$

Odavde proizlazi:

$$\vec{r}_u=a\cos v\cos u\,\vec{i}-a\frac{\cos^2 u}{\sin u}\,\vec{j}+a\sin v\cos u\,\vec{k},$$

$$\vec{r}_v=-a\sin v\sin u\,\vec{i}+a\cos v\sin u\,\vec{k},$$

$$\vec{r}_{uu}=-a\cos v\sin u\,\vec{i}+a\frac{\cos u\,(1+\sin^2 u)}{\sin^2 u}\,\vec{j}-a\sin v\sin u\,\vec{k},$$

$$\vec{r}_{vv}=-a\cos v\sin u\,\vec{i}-a\sin v\sin u\,\vec{k},$$

$$\vec{r}_{uv} = -a \sin v \cos u \,\vec{i} + a \cos v \cos u \,\vec{k}.$$

Stoga je:

$$E = (\vec{r}_u)^2 = a^2 \cos^2 u \,(1 + \operatorname{ctg}^2 u) = a^2 \operatorname{ctg}^2 u,$$

$$G = (\vec{r}_v)^2 = a^2 \sin^2 u,$$

$$F = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v = 0,$$

$$W = \sqrt{EG - F^2} = \sqrt{a^4 \cos^2 u} = a^2 \cos u,$$

$$L = \frac{1}{W}(\vec{r}_u,\ \vec{r}_v,\ \vec{r}_{uu}) = \frac{a^3 \cos u \sin u}{a^2 \cos u} \begin{vmatrix} \cos v & -\operatorname{ctg} u & \sin v \\ -\sin v & 0 & \cos v \\ -\cos v \sin u & \dfrac{\operatorname{ctg} u\,(1 + \sin^2 u)}{\sin u} & -\sin v \sin u \end{vmatrix}$$

$$L = a \sin u \operatorname{ctg} u \begin{vmatrix} \cos v & -1 & \sin v \\ -\sin v & 0 & \cos v \\ -\cos v \sin u & \dfrac{1 + \sin^2 u}{\sin u} & -\sin v \sin u \end{vmatrix} =$$

$$= a \cos u \left[\sin^2 v \sin u + \cos^2 v \sin u - \frac{1 + \sin^2 u}{\sin u} \right] =$$

$$= \frac{a \cos u}{\sin u} \left[\sin^2 u - 1 - \sin^2 u \right].$$

$$L = -a \operatorname{ctg} u.$$

$$M = \frac{1}{W}(\vec{r}_u,\ \vec{r}_v,\ \vec{r}_{uv}) = \frac{a^3 \cos^2 u \sin u}{a^2 \cos u} \begin{vmatrix} \cos v & -\operatorname{ctg} u & \sin v \\ -\sin v & 0 & \cos v \\ -\sin v & 0 & \cos v \end{vmatrix}$$

$$M = 0.$$

$$N = \frac{1}{W}(\vec{r}_u,\ \vec{r}_v,\ \vec{r}_{vv}) = \frac{a^3 \cos u \sin^2 u}{a^2 \cos u} \begin{vmatrix} \cos v & -\operatorname{ctg} u & \sin v \\ -\sin v & 0 & \cos v \\ -\cos v & 0 & -\sin v \end{vmatrix}$$

$$= a \sin^2 u \,(\operatorname{ctg} u).$$

$$N = a \sin u \cos u.$$

Tada je normalna zakrivljenost:

$$K_n = \frac{-a \operatorname{ctg} u \, \mu^2 + a \sin u \cos u}{a^2 \operatorname{ctg}^2 u \, \mu^2 + a^2 \sin^2 u}, \quad \mu = \frac{\mathrm{d} u}{\mathrm{d} v}.$$

Glavne zakrivljenosti dobit ćemo kao ekstremne vrijednosti funkcije:

$$F(\mu) = [a K_n \operatorname{ctg}^2 u + \operatorname{ctg} u] \, \mu^2 + [a K_n \sin^2 u - \sin u \cos u] = 0.$$

Imamo:

$$\frac{\partial F}{\partial \mu} = 2 \, [a K_n \operatorname{ctg}^2 u + \operatorname{ctg} u] \, \mu = 0.$$

Ekstremne vrijednosti dobijemo eliminiravši μ iz malo prije dobivenih jednadžbi.

Dobijemo:

$$K_1 = -\frac{\operatorname{tg} u}{a},$$

$$K_2 = \frac{\operatorname{ctg} u}{a}.$$

Gaussova zakrivljenost jest:

$$K = K_1 \, K_2 = -\frac{\operatorname{tg} u \operatorname{ctg} u}{a^2} = -\frac{1}{a^2}.$$

Srednja zakrivljenost jest:

$$H = \frac{K_1 + K_2}{2} = \frac{\operatorname{ctg} u - \operatorname{tg} u}{2a}.$$

Gaussova zakrivljenost $K = -\dfrac{1}{a^2}$ je, dakle, konstantna i negativna (vidjeti § 9.7).

S obzirom da je Gaussova zakrivljenost negativna, to se na pseudosferi nalaze same hiperboličke točke.

Zatim, jer je $F = 0$ i $M = 0$, to su koordinatne u i v krivulje ujedno i (glavne) krivulje zakrivljenosti.

Ovo se također vidi i iz jednadžbe (prema (20)):

$$\begin{vmatrix} \mathrm{d}u^2 & -\mathrm{d}u \, \mathrm{d}v & \mathrm{d}v^2 \\ a^2 \sin^2 u & 0 & a^2 \operatorname{ctg}^2 u \\ a \sin u \cos u & 0 & -a \operatorname{ctg} u \end{vmatrix} = 0,$$

odnosno:

$$\mathrm{d}u \, \mathrm{d}v \, (a^3 \sin^2 u \operatorname{ctg} u + a^3 \sin u \cos u \operatorname{ctg}^2 u) = 0.$$

Odavde je $\mathrm{d}u = 0$ i $\mathrm{d}v = 0$, pa je $u = c_1$ i $v = c_2$, a to su koordinatne krivulje.

323. Naći glavne polumjere zakrivljenosti elipsoida:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

u točki $(0, 0, c)$.

Ako uzmemo parametrizaciju

$$\vec{r} = \{ a \sin u \cos v,\ b \sin u \sin v,\ c \cos u \}$$

(kao u zadatku 227) onda dobivamo:

$$\vec{r}_u = \{ a \cos u \cos v,\ b \cos u \sin v, -c \sin u \},$$

$$\vec{r}_v = \{ -a \sin u \sin v,\ b \sin u \cos v,\ 0 \},$$

pa u točki $T = (0, 0, c)$ $(u = 0,\ v = \text{proizvoljan})$
dobijemo:

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = \vec{0},$$

točka T, dakle, nije regularna točka u odnosu na tu parametrizaciju. Radi toga treba uzeti neku drugu parametrizaciju elipsoida i to takvu da je u odnosu na nju točka T regularna. Uzmimo parametrizaciju (vidi zad. 214. i 270):

$$\vec{r} = \{ u,\ v,\quad z(u, v) \}.$$

Kako je prema zad. 270. i 318:

$$E = 1 + p^2, \quad F = pq, \quad G = 1 + q^2, \quad \text{te}$$

$$L = \frac{r}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad M = \frac{s}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad N = \frac{t}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

i kako u točki T vrijedi:

$$p = z_u = 0, \quad q = z_v = 0, \quad r = z_{uu} = -\frac{c}{a^2},$$

$$s = z_{uv} = 0, \quad t = z_{vv} = -\frac{c}{b^2},$$

to je u toj točki:

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = 1, \quad L = -\frac{c}{a^2}, \quad M = 0, \quad N = -\frac{c}{b^2}.$$

Lako se vidi da je u ovoj parametrizaciji točka T regularna.
Normalna zakrivljenost u točki T jest:

$$K_n = \frac{-\frac{c}{a^2}\mu^2 - \frac{c}{b^2}}{\mu^2 + 1}.$$

Glavne zakrivljenosti dobit ćemo kao ekstremne vrijednosti funkcije:

$$F(\mu) = \left(K_n + \frac{c}{a^2}\right)\mu^2 + \left(K_n + \frac{c}{b^2}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial \mu} = 2\left(K_n + \frac{c}{a^2}\right)\mu = 0.$$

Eliminiravši μ dobijemo glavne zakrivljenosti u točki T elipsoida:

$$K_1 = -\frac{c}{a^2}, \quad K_2 = -\frac{c}{b^2},$$

Glavni polumjeri zakrivljenosti prema tome jesu:

$$\left(\frac{1}{K}\right)_1 = -\frac{a^2}{c}, \quad \left(\frac{1}{K}\right)_2 = -\frac{b^2}{c}.$$

Glavne zakrivljenosti dobit ćemo i na drugi način kao rješenja jednadžbe (prema (18)):

$$x^2 - 2Hx + K = 0.$$

Kako je prema (16) i (17):

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{c^2}{a^2 b^2},$$

$$H = \frac{EN - 2FM + LG}{2(EG - F^2)} = -\frac{c(a^2 + b^2)}{2a^2 b^2},$$

to je:

$$K_{1,2} = H \pm \sqrt{H^2 - K},$$

odnosno:

$$K_{1,2} = -\frac{c(a^2 + b^2)}{2a^2 b^2} \pm \frac{\sqrt{c^2(a^2 + b^2)^2 - 4a^2 b^2 c^2}}{2a^2 b^2},$$

pa je na kraju:

$$K_1 = -\frac{c}{a^2}, \quad K_2 = -\frac{c}{b^2}.$$

324. Naći normalnu, glavne, Gaussovu i srednju zakrivljenost rotacione plohe (vidi zad. 215), te (glavne) krivulje zakrivljenosti:

$$x = f(u)\cos v, \quad y = f(u)\sin v, \quad z = g(u).$$

Kako je prema 268. i 319. zadatku:

$$E = f'^2 + g'^2, \quad F = 0, \quad G = f^2, \quad W^2 = f^2(f'^2 + g'^2),$$

$$L = \frac{f'g'' - f''g'}{\sqrt{f'^2 + g'^2}}, \quad M = 0, \quad N = \frac{fg'}{\sqrt{f'^2 + g'^2}},$$

to je normalna zakrivljenost:

$$K_n = \frac{(f'g''-f''g')\,du^2 + fg'\,dv^2}{\sqrt{f'^2+g'^2}\,[(f'^2+g'^2)\,du^2 + f^2\,dv^2]}.$$

Iz funkcije:

$$F(\mu) = [K_n(f'^2+g'^2)^{3/2} - (f'g''-f''g')]\,\mu^2 + [K_n f^2 \sqrt{f'^2+g'^2} - fg' = 0,$$

$$\mu = \frac{du}{dv},$$

dobivamo glavne zakrivljenosti:

$$K_1 = \frac{f'g''-f''g'}{(f'^2+g'^2)^{3/2}}, \quad K_2 = \frac{g'}{f(f'^2+g'^2)^{1/2}},$$

Gaussovu zakrivljenost:

$$K = \frac{g'(f'g''-f''g')}{f(f'^2+g'^2)^2},$$

i srednju zakrivljenost:

$$H = \frac{f(f'g''-f''g') + g'(f'^2+g'^2)}{2f(f'^2+g'^2)}.$$

Budući da je $F=0$ i $M=0$, tada su krivulje zakrivljenosti ujedno i koordinatne $u-$i $v-$linije, tj. krivulje zakrivljenosti su paralele i meridijani rotacione plohe.

325. U zavisnosti o realnom parametru m diskutirati vrstu točaka na plohi:

$$z = mxy.$$

Naći drugu diferencijalnu formu te plohe.

Prema zad. 318. i 321. imamo:

$$L = \frac{r}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = \frac{0}{\sqrt{1+m^2x^2+m^2y^2}} = 0,$$

$$M = \frac{s}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = \frac{m}{\sqrt{1+m^2x^2+m^2y^2}},$$

$$N = \frac{t}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = \frac{0}{\sqrt{1+m^2x^2+m^2y^2}} = 0,$$

pa je druga diferencijalna forma:

$$\mathrm{II} = \frac{2m\,dx\,dy}{\sqrt{1+m^2x^2+m^2y^2}}.$$

Označimo s $\Delta = LN - M^2$,

pa je:

$$\Delta = -\frac{m^2}{1+m^2x^2+m^2y^2}.$$

Kako je nazivnik uvijek pozitivna veličina, to je:

a) za eliptičke točke:

$$\Delta > 0 \quad \text{odnosno} \quad -m^2 > 0.$$

(Ni za jedno m ploha nema eliptičkih točaka.)

b) za hiperboličke točke:

$$\Delta < 0 \quad \text{odnosno:} \quad -m^2 < 0.$$

Za svaki $m \neq 0$ točke na plohi su hiperboličke. Ploha je hiperboličk paraboloid.

c) za paraboličke točke:

$$\Delta = 0 \quad \text{odnosno} \quad -m^2 = 0.$$

Za $m = 0$ (tada ja zadana ploha ravnina),
ploha ima sve točke paraboličke.

326. Ispitati oblik plohe:

$$\vec{r} = \{u, v, u^2 + v^2\}, \quad u, v \in \mathbf{R}$$

u okolišu točke $O = (0, 0, 0)$.

Prema zad. 318. i 321. ploha ima jednadžbu:

$$z = x^2 + y^2,$$

pa računajmo koeficijente prve i druge diferencijalne forme:

$$E = 1 + p^2, \quad F = pq, \quad G = 1 + q^2, \quad W^2 = 1 + p + q^2,$$

$$L = \frac{r}{W}, \quad M = \frac{s}{W}, \quad N = \frac{t}{W}.$$

kako je:

$$p = 2x, \quad q = 2y, \quad r = 2, \quad s = 0, \quad t = 2,$$

to je:

$$E = 1 + 4x^2, \quad F = 4xy, \quad G = 1 + 4y^2, \quad W^2 = 1 + 4x^2 + 4y^2,$$

$$L = \frac{2}{W}, \quad M = 0, \quad N = \frac{2}{W}.$$

Točka $O = (0, 0, 0)$ je kružna, jer je ispunjen uvjet:

$$L : M : N = E : F : G.$$

Nadalje odredimo:

$$\Delta = LN - M^2,$$

$$\Delta = \frac{4}{W^2} = \frac{4}{1+4x^2+4y^2}.$$

Ostale točke plohe su eliptičke, jer je uvijek $\Delta > 0$. U okolištu točke $O = (0, 0, 0)$ ploha se nalazi sva s jedne strane tangencijalne ravnine, jer je to svojstvo eliptičke točke. Ploha je kružni paraboloid.

327. Naći asimptotske linije i asimptotske smjerove plohe $z = f(x, y)$, pa zatim dobiveni rezultat primijeniti na plohu:

$$z = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}.$$

Jednadžba asimptotskih linija glasi:

$$L\,\mathrm{d}u^2 + 2M\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + N\,\mathrm{d}v^2 = 0,$$

a asimptotskih smjerova:

$$L\mu^2 + 2M\mu + N = 0, \quad \mu = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}.$$

Kako je prema zadatku 318. za plohu $z = f(x, y)$:

$$L = \frac{r}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad M = \frac{s}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad N = \frac{t}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

to jednadžba asimptotskih linija glasi (njihova projekcija na ravninu XOY):

$$\frac{r}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\,\mathrm{d}x^2 + \frac{2s}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \frac{t}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\,\mathrm{d}y^2 = 0,$$

odnosno:

$$r\,\mathrm{d}x^2 + 2s\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + t\,\mathrm{d}y^2 = 0.$$

Jednadžba asimptotskih smjerova pak glasi:

$$r\mu^2 + 2s\mu + t = 0, \quad \mu = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}.$$

Za plohu $z = \dfrac{x^2+y^2}{xy}$ imamo:

$$p = z_x = \frac{x^2-y^2}{x^2y}; \quad q = z_y = \frac{y^2-x^2}{xy^2}; \quad r = z_{xx} = \frac{2y}{x^3};$$

$$s = z_{xy} = \frac{-(x^2+y^2)}{x^2y^2}, \quad t = z_{yy} = \frac{2x}{y^3},$$

pa je jednadžba asimptotskih smjerova:

$$\frac{2y}{x^3}\ \mu^2 - \frac{2(x^2+y^2)}{x^2y^2}\mu + \frac{2x}{y^3} = 0,$$

odnosno:

$$y^4\mu^2 - xy(x^2+y^2)\mu + x^4 = 0.$$

Asimptotski smjerovi su rješenja gornje kvadratne jednadžbe po μ:

$$\mu_{1,2} = \frac{xy(x^2+y^2) \pm \sqrt{x^2y^2(x^2+y^2)^2 - 4x^4y^4}}{2y^4} = \frac{xy(x^2+y^2) \pm \sqrt{x^2y^2(x^2-y^2)^2}}{2y^4}$$

$$\mu_{1,2} = \frac{xy[(x^2+y^2) \pm (x^2-y^2)]}{2y^4}.$$

Prvi asimptotski smjer jest:

$$\mu_1 = \frac{xy[(x^2+y^2) + (x^2-y^2)]}{2y^4} = \frac{x^3}{y^3},$$

a drugi:

$$\mu_2 = \frac{xy[(x^2+y^2) - (x^2-y^2)]}{2y^4} = \frac{x}{y}.$$

Asimptotske linije se mogu odrediti iz asimptotskih smjerova stavivši da je $\mu = \dfrac{dx}{dy}$.

Prva asimptotska linija ima diferencijalnu jednadžbu:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x^3}{y^3},$$

odnosno:

$$\frac{dx}{x^3} = \frac{dy}{y^3}.$$

Prva asimptotska linija pripada familiji krivulja:

$$\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} = C_1. \tag{1}$$

Dakle, asimptotske linije su presječne krivulje plohe i familije hiperboličkih valjaka (1) kojima su izvodnice paralelne s osi OZ.

Druga asimptotska linija ima diferencijalnu jednadžbu:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x}{y},$$

odnosno:

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{\mathrm{d}y}{y}.$$

Druga asimptotska linija je familija:

$$y = C_2 x.$$

Dakle, ravnine kroz os OZ sijeku plohu u asimptotskim linijama.

328. Naći asimptotske linije katenoida:

$$x = \operatorname{ch} u \cos v, \quad y = \operatorname{ch} u \sin v, \quad z = u, \quad u \in \mathbf{R}, \quad v \in [0, 2\pi].$$

Imamo:

$$\begin{aligned}
&E = (\operatorname{sh} u \cos v)^2 + (\operatorname{sh} u \sin v)^2 + (1)^2 = \operatorname{sh}^2 u + 1,\\
&G = (-\operatorname{ch} u \sin v)^2 + (\operatorname{ch} u \cos v)^2 \qquad = \operatorname{ch}^2 u,\\
&F = 0,\\
&W^2 = EG - F^2 = \operatorname{ch}^4 u;
\end{aligned}$$

$$L = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 u} \begin{vmatrix} \operatorname{sh} u \cos v & \operatorname{sh} u \sin v & 1 \\ -\operatorname{ch} u \sin v & \operatorname{ch} u \cos v & 0 \\ \operatorname{ch} u \cos v & \operatorname{ch} u \sin v & 0 \end{vmatrix} = -1,$$

$$M = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 u} \begin{vmatrix} \operatorname{sh} u \cos v & \operatorname{sh} u \sin v & 1 \\ -\operatorname{ch} u \sin v & \operatorname{ch} u \cos v & 0 \\ -\operatorname{sh} u \sin v & \operatorname{sh} u \cos v & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$N = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 u} \begin{vmatrix} \operatorname{sh} u \cos v & \operatorname{sh} u \sin v & 1 \\ -\operatorname{ch} u \sin v & \operatorname{ch} u \cos v & 0 \\ -\operatorname{ch} u \cos v & -\operatorname{ch} u \sin v & 0 \end{vmatrix} = 1.$$

Jednadžba asimptotskih smjerova glasi:

$$L\mu^2 + 2M\mu + N = 0,$$

odnosno:

$$-\mu^2 + 1 = 0,$$

a asimptotski smjerovi jesu:

$$\mu_{1,2} = \pm 1.$$

Asimptotske krivulje dobijemo kao rješenja diferencijalnih jednadžbi:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v} = \pm 1,$$

$$\mathrm{d}u = \pm\, \mathrm{d}v,$$

i glase:

$$u + v = c_1,$$
$$u - v = c_2.$$

U zadacima od 329. do 337. naći drugu diferencijalnu formu slijedećih (rotacionih) ploha:

329. $x = a \sin u \cos v$, $y = a \sin u \sin v$, $z = c \cos u$, $u \in [0, \pi]$, $v \in [0, 2\pi]$, (rotacionog elipsoida);

330. $x = R \cos v$, $y = R \sin v$, $z = u$, $u \in \mathbf{R}$, $v \in [0, 2\pi]$, (kružni valjak);

331. $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = ku$, $u \in \mathbf{R}$, $v \in [0, 2\pi]$, (kružni stožac);

332. $x = a \operatorname{ch} u \cos v$, $y = a \operatorname{ch} u \sin v$, $z = c \operatorname{sh} u$, $u \in \mathbf{R}$, $v \in [0, 2\pi]$, (jednoplošni rotacioni hiperboloid);

333. $x = a \operatorname{sh} u \cos v$, $y = a \operatorname{sh} u \sin v$, $z = c \operatorname{ch} u$, $u \in \mathbf{R}$, $v \in [0, 2\pi]$, (dvoplošni rotacioni hiperboloid);

334. $x = au \cos v$, $y = au \sin v$, $z = u^2$, $u \in \mathbf{R}$, $v \in [0, 2\pi]$, (rotacioni paraboloid);

335. $x = (a + b \cos u) \cos v$, $y = (a + b \cos u) \sin v$, $z = b \sin u$, $u, v \in [0, 2\pi]$, (torus);

336. $x = a \sin u \cos v$, $y = a \sin u \sin v$, $z = a\left(\ln \operatorname{tg} \dfrac{u}{2} + \cos u\right)$, $u \in \mathbf{R}_+$, $v \in [0, 2\pi]$, (pseudosfera);

337. $x = a \operatorname{ch} \dfrac{u}{a} \cos v$, $y = a \operatorname{ch} \dfrac{u}{a} \sin v$, $z = u$, $u \in \mathbf{R}$, $v \in [0, 2\pi]$, (katenoid).

338. Naći drugu diferencijalnu formu helikoida:

$$x = au \cos v,\ y = au \sin v,\ z = bv, \quad u, v \in \mathbf{R}.$$

339. Ako je druga kvadratna forma plohe:

$$z = f(x, y)$$

identički jednaka nuli, tada je ploha ravnina ili njen dio. Dokazati.

340. Naći glavne zakrivljenosti, zatim Gaussovu i srednju zakrivljenost plohe:

$$z = xy$$

u točki $M = (1, 1, 1)$.

341. Naći normalnu, glavne zakrivljenosti, Gaussovu zakrivljenost i srednju zakrivljenost sfere:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Dokazati da je Gaussova zakrivljenost sfere konstantna i pozitivna.

342. Naći glavne polumjere zakrivljenosti plohe:

$$e^z \cos x = \cos y$$

u točki $T = (0, 0, z)$.

342. Naći glavne zakrivljenosti plohe (eliptičkog paraboloida):

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$$

u točki $T = (0, 0, 0)$ (vidi zad. 372).

344. Naći glavne polumjere zakrivljenosti i glavne smjerove plohe:

$$\vec{r} = \{x, y, xy\}, \quad x, y \in \mathbf{R}.$$

345. Naći glavne zakrivljenosti rotacionog paraboloida:

$$z = a(x^2 + y^2)$$

u točki $(0, 0, 0)$.

346. Naći Gaussovu i srednju zakrivljenost hiperboličkog paraboloida:

$$z = axy$$

u točki $x = y = 0$.

347. Pokazati da je srednja zakrivljenost helikoida:

$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = \mathrm{c} v$ jednaka nuli.

348. Pokazati da je srednja zakrivljenost katenoida:

$$z = a \operatorname{ar\,ch} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{a}$$

jednaka nuli.

349. Naći srednju i Gaussovu zakrivljenost plohe:

$$z = \frac{1}{a} \ln \frac{\cos a x}{\cos a y}$$

u točki $x = y = 0$.

350. Naći Gaussovu i srednju zakrivljenost plohe:

$$\vec{r} = \{u, v, auv\}, \quad u, v \in \mathbf{R}.$$

351. Naći Gaussovu i srednju zakrivljenost plohe:

$$\vec{r} = \left\{u, v, \frac{u - v}{u + v}\right\}, \quad u, v \in \mathbf{R}, \quad u + v \neq 0,$$

u točki $(1, 1)$.

352. Odrediti Gaussovu i srednju zakrivljenost plohe:

$$\vec{r} = \{ a(u+v), \quad b(u-v), \quad uv \}, \quad u, v \in \mathbf{R}.$$

353. Naći glavne, Gaussovu i srednju zakrivljenost, te glavne smjerove rotacionog stošca:

$$x^2 + y^2 = az^2.$$

354. Naći normalnu, glavne, Gaussovu i srednju zakrivljenost, te krivulje zakrivljenosti rotacionog elipsoida:

$$\vec{r} = \{ a \sin u \cos v, \quad a \sin u \sin v, \quad b \cos u \}.$$

355. Naći normalnu, glavne, Gaussovu i srednju zakrivljenost, te krivulje zakrivljenosti plohe:

$$x = \mathrm{e}^{-u} \cos v, \; y = \mathrm{e}^{-u} \sin v, \; z = \ln(\mathrm{e}^u + \sqrt{\mathrm{e}^{2u} - 1}) - \sqrt{1 - \mathrm{e}^{-2u}}, \; u, v \in \mathbf{R}.$$

356. Naći glavne, srednju i Gaussovu zakrivljenost plohe, koja nastaje rotacijom pravca p oko osi OZ, ako pravac p s osi OZ zatvara kut θ.

357. Odrediti nepoznate funkcije f i q tako da rotacione plohe

1° $x = f(u) \cos v, \quad y = f(u) \sin v, \quad z = g(u), \quad u \in \mathbf{R}, \quad v \in [0, 2\pi],$

2° $\vec{r} = \{ u \cos v, \quad u \sin v, \quad g(u) \}, \quad u \in \mathbf{R}, \quad v \in [0, 2\pi],$

3° $\vec{r} = f(u) \vec{e}(v) + u\vec{k}, \quad u \in \mathbf{R}, \quad v \in [0, 2\pi]$

budu minimalne.

358. Naći takve funkcije f i g da ploha:

$\vec{r} = \{ f(u) \cos v, \quad f(u) \sin v, \quad g(v) \}, \quad u \in \mathbf{R}, \quad v \in [0, 2\pi],$

bude minimalna.

359. Naći Gaussovu zakrivljenost ploha zadanih u zadacima od 329. do 337.

360. Pokazati da je u svakoj točki plohe:

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = \lambda u, \quad u \in \mathbf{R}, \quad v \in [0, 2\pi]$$

jedna od glavnih krivulja zakrivljenosti pravac.

U zadacima od 361. do 366. naći krivulje zakrivljenosti na sljedećim plohama:

361. hiperboličkom paraboloidu: $z = axy$;

362. rotacionoj plohi: $x = f(u) \cos v, y = f(u) \sin v, \quad z = \phi(u), u \in \mathbf{R}, v \in [0, 2\pi]$;

363. kružnom valjku: $x = R \cos v, \quad y = R \sin v, \quad z = u, \quad u \in \mathbf{R}, \quad v \in [0, 2\pi]$;

364. kružnom stošcu: $x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = ku, \quad u \in \mathbf{R}, \quad v \in [0, 2\pi]$;

365. na plohi:

$$\vec{r} = \{ u^2 + v^2, \quad u^2 - v^2, \quad v \}, \quad u, v \in \mathbf{R};$$

366. kružnom paraboloidu:

$$\vec{r}=\{u,\ v,\ u^2+v^2\},\quad u,v\in\mathbf{R}.$$

367. Na ravnini i na sferi svaka krivulja jest krivulja zakrivljenosti. Dokazati.

368. Pokazati da je na ravnini i sferi svaki smjer ujedno i glavni smjer.

369. Dokazati da su koordinatne krivulje plohe ujedno i krivulje zakrivljenosti tada i samo tada kad je

$$F=0 \quad \text{i} \quad M=0.$$

370. Pokazati da su koordinatne krivulje plohe:

$$\vec{r}=\{3u-u^3+3uv^2,\quad v^3-3u^2v-3v,\quad 3u^2-3v^2,\},\quad u,v\in\mathbf{R}$$

ujedno krivulje zakrivljenosti.

Naći koeficijente prve i druge diferencijalne forme.

371. Naći krivulje zakrivljenosti elipsoida:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

372. Naći prvu i drugu diferencijalnu formu, Gaussovu i srednju zakrivljenost, te krivulje zakrivljenosti eliptičkog paraboloida:

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z \text{ (vidi zad. 282, 334. i 424).}$$

Naći asimptotske linije ploha zadanih u zadacima od 373. do 385.

373. hiperboličkog paraboloida $z=axy$,

374. $\vec{r}=\{v\cos u-\sin u,\quad v\sin u+\cos u,\quad u\},\quad u,v\in\mathbf{R}$,

375. $\vec{r}=\{3u+3v,\quad 3u^2+3v^2,\quad 2u^3+2v^3\},\quad u,v\in\mathbf{R}$,

376. $\vec{r}=\{u\cos v,\quad u\sin v,\quad \sqrt{2}u\},\quad u\in\mathbf{R},\quad v\in[0,2\pi]$,

377. $\vec{r}=\{(1+u)\operatorname{ch} v,\quad (1-u)\operatorname{sh} v,\quad u\},\quad u,v\in\mathbf{R}$,

378. pseudosfere:

$$\vec{r}=\left\{a\sin u\cos v,\ a\sin u\sin v,\ a\left(\cos u+\ln\operatorname{tg}\frac{u}{2}\right)\right\},$$

$u\in\mathbf{R}_+,\quad v\in[0,2\pi]$,

379. $\vec{r}=\left\{u^2+v,\quad u^3+uv,\quad u^4+\dfrac{2}{3}u^2v\right\},\quad u,v\in\mathbf{R}$,

380. rotacione plohe:

a) $x=f(u)\cos v,\quad y=f(u)\sin v,\quad z=g(u),\quad u\in\mathbf{R},\quad v\in[0,2\pi]$,

b) $\vec{r}=t\cos\varphi\,\vec{i}+t\sin\varphi\,\vec{j}+\ln t\,\vec{k},\quad u\in\mathbf{R}_+,\quad v\in[0,2\pi]$,

381. $\vec{r} = \{u, uv, f(v)\}, \quad u, v \in \mathbf{R}$, .

382. hiperboličkog paraboloida:

$$\vec{r} = \left\{ au \operatorname{ch} v, \quad y = bu \operatorname{sh} v, \quad z = \frac{1}{2} u^2 \right\}, \quad u, v \in \mathbf{R},$$

383. jednoplošnog (rotacionog) hiperboloida:

$x = a \operatorname{ch} u \cos v, \quad y = a \operatorname{ch} u \sin v, \quad z = c \operatorname{sh} u, \quad u \in \mathbf{R}, \quad v \in [0, 2\pi]$,

384. torusa:

$x = (a + b \cos u) \cos v, \quad y = (a + b \cos u) \sin v, \quad z = b \sin u, \quad u, v \in [0, 2\pi]$,

385. $z = x \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$.

386. Pokazati da na helikoidu:

$$x = a u \cos v, \quad y = a u \sin v, \quad z = b v, \quad u, v \in \mathbf{R}$$

jedna porodica asimptotskih krivulja jesu pravci, a druga zavojne krivulje.

387. Dokazati da bi koordinatne krivulje plohe bile ujedno i asimptotske linije nužno je i dovoljno da je $N = 0$ i $L = 0$.

388. Dokazati da je asimptotska mreža krivulja na plohi S ortogonalna, ako je srednja zakrivljenost od S jednaka nuli.

389. Naći projekcije na ravnini XOY asimptotskih linija plohe:

$$\vec{r} = \{u, v, u^m v^n\}, \quad u, v \in \mathbf{R}$$

390. Zadana je krivulja:

$$\vec{r} = \{a \operatorname{ch} t \cos t, \ a \operatorname{ch} t \sin t, a t\}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Pokazati da ova krivulja leži na plohi

$x^2 + y^2 = a^2 \operatorname{ch}^2 \frac{z}{a}$ (katenoid) i da je asimptotska linija te plohe.

391. Zadana je ploha S:

$$\vec{r} = \left\{ \sqrt{u} \cos v, \quad \sqrt{u} \sin v, \frac{1}{u} \right\}, \quad u \in \mathbf{R}_+, \quad v \in [0, 2\pi]:$$

1° Napisati jednadžbu ove plohe u obliku $z = f(x, y)$.

2° Pokazati da je mreža koordinatnih krivulja od S ortogonalna.

3° Odrediti asimptotske linije plohe S.

392. Zadana je ploha:

$$\vec{r} = \left\{ u + \frac{v}{u}, \quad u - \frac{v}{u}, \quad uf(v) \right\}, \quad u \in \mathbf{R} \setminus 0, \quad v \in \mathbf{R},$$

f barem dvaput diferencijabilna funkcija.

1° Odrediti funkciju $f(v)$ tako da koordinatne linije $u = \text{const.}$ budu istovremeno i asimptotske linije plohe (uz uvjet $v = 1$, $f(v) = 1$).

2° Pokazati da je torzija asimptotskih linija nula.

393. Zadana je ploha S:

$$\vec{r} = \left\{ \frac{a}{2}\left(v + \frac{1}{v}\right)\cos u;\quad \frac{b}{2}\left(v + \frac{1}{v}\right)\sin u;\quad \frac{c}{2}\left(v - \frac{1}{v}\right) \right\},$$

$$u \in [0,2\pi], \quad v \in \mathbf{R} \setminus 0.$$

1° Napisati jednadžbu plohe S u obliku $F(x, y, z) = 0$.

2° Kakva veza mora postojati između konstanti a i b da bi mreža koordinatnih krivulja plohe S bila ortogonalna?

3° Odrediti asimptotske linije ove plohe.

394. Naći eliptičke, paraboličke i hiperboličke točke na torusu:

$$x = (a + b\cos u)\cos v, \quad y = (a + b\cos u)\sin v, \quad z = b\sin u, \quad u, v \in [0,2\pi].$$

U zadacima od 395. do 403. ispitati vrstu točaka na sljedećim plohama drugog reda:

395. elipsoidu: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$,

396. jednoplošnom hiperboloidu: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ (vidi zad. 229),

397. dvoplošnom hiperboloidu: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1$ (vidi zad. 230),

398. eliptičkom paraboloidu: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 2z$ (vidi zad. 228),

399. hiperboličkom paraboloidu: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 2z$ (vidi zad. 233),

400. stošcu: $x^2 + y^2 = z^2$ (vidi zad. 232),

401. eliptičkom valjku: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ (vidi zad. 231),

402. paraboličkom valjku: $x^2 = 2pz$,

403. hiperboličkom valjku: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{b^2} = 1$.

404. Ispitati vrstu točaka na katenoidu:

$$x = a\,\mathrm{ch}\frac{u}{a}\cos v, \quad y = a\,\mathrm{ch}\frac{u}{a}\sin v, \quad z = u, \quad u \in \mathbf{R}, \quad v \in [0,2\pi].$$

U zadacima od 405. do 407. ispitati vrstu točaka na plohama koje nastaju rotacijom sljedećih krivulja:

405. sinusoide $y = \sin x$, $z = 0$, oko osi OX,

406. krivulje $y = \ln x$, $z = 0$, oko osi OX,

407. krivulje $y = \ln x$, $z = 0$, oko osi OY.

408. Sinusoida $y = \sin x$, $z = 0$, rotira oko osi OX. Naći na rotacionoj plohi kružne točke.

409. Naći kružne točke rotacionog elipsoida:

$$x = a \sin u \cos v, \quad y = a \sin u \sin v, \quad z = c \cos u, \quad u \in [0,\pi], \quad v \in [0,2\pi].$$

410. Naći kružne točke rotacionog paraboloida:

$$x = a u \cos v, \quad y = a u \sin v, \quad z = u^2, \quad u \in \mathbf{R}, \quad v \in [0,2\pi].$$

411. Naći uvjet za kružne točke plohe:

$$z = f(x, y).$$

412. Naći kružne točke eliptičkog paraboloida:

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z, \quad (p > 0, \quad q > 0).$$

413. Naći kružne točke na elipsoidu:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

414. Naći geometrijsko mjesto paraboličkih točaka na plohi:

$$x = u + v, \quad y = uv, \quad z = u^3 + v^3, \quad u, v \in \mathbf{R}.$$

415. Dokazati da su sve točke plohe:

$$x + y = z^3$$

paraboličke.

416. Pokazati da su kružne točke karakterizirane jednakosti:

$$H^2 = K.$$

417. Naći kružne točke plohe:

$$xyz = a^3.$$

418. Zadana je ploha:

$$z = 2x^2 + \frac{9}{2} y.$$

1° Naći u ishodištu koordinatnog sustava jednadžbu Dupinove indikatrise.

2° Izračunati u ishodištu koordinatnog sustava radius zakrivljenosti normalnog presjeka čija tangenta zaklapa s osi OX kut od 45°.

419. U ishodištu koordinatnog sustava naći jednadžbu Dupinove indikatrise na plohu:

$$\vec{r} = \{u,\ v,\ u^2 - v^2\}, \quad u, v \in \mathbf{R}^2.$$

Rješenja

329. $\mathrm{II} = \dfrac{ac}{\sqrt{a^2\cos^2 u + c^2 \sin^2 u}}(\mathrm{d}u^2 + \sin^2 u\,\mathrm{d}v^2).$

330. $\mathrm{II} = R\,\mathrm{d}v^2.$

331. $\mathrm{II} = \dfrac{ku}{\sqrt{1+k^2}}\,\mathrm{d}v^2.$

332. $\mathrm{II} = \dfrac{ac}{\sqrt{a^2\,\mathrm{sh}^2 u + c^2\,\mathrm{ch}^2 u}}(-\mathrm{d}u^2 + \mathrm{ch}^2 u\,\mathrm{d}v^2).$

333. $\mathrm{II} = \dfrac{ac}{\sqrt{a^2\,\mathrm{ch}^2 u + c^2\,\mathrm{sh}^2 u}}(\mathrm{d}u^2 + \mathrm{sh}^2 u\,\mathrm{d}v^2).$

334. $\mathrm{II} = \dfrac{2a}{\sqrt{a^2 + 4u^2}}(\mathrm{d}u^2 + u^2\,\mathrm{d}v^2).$

335. $\mathrm{II} = b\,\mathrm{d}u^2 + \cos u\,(a + b\cos u)\,\mathrm{d}v^2.$

336. $\mathrm{II} = a(-\mathrm{ctg}\,u\,\mathrm{d}u^2 + \sin u \cos u\,\mathrm{d}v^2).$

337. $\mathrm{II} = a\,\mathrm{d}v^2 - \dfrac{1}{a}\,\mathrm{d}u^2.$

338. $\mathrm{II} = -\dfrac{2ab\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v}{\sqrt{a^2u^2 + b^2}}.$

339. Prema zad. 318. $\mathrm{II} = \dfrac{f_{xx}\,\mathrm{d}x^2 + 2f_{xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + f_{yy}\,\mathrm{d}y^2}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}.$

Iz uvjeta zadatka je: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0,\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0,\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$

Opće rješenje ovog sustava je: $f = ax + by + c$.

340. $K_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{9},\quad K_2 = -\dfrac{\sqrt{3}}{3};\quad K = -\dfrac{1}{9},\quad H = -\dfrac{\sqrt{3}}{9}.$

341. $K_n = -\dfrac{1}{R};\quad K_1 = -\dfrac{1}{R},\quad K_2 = -\dfrac{1}{R};\quad K = \dfrac{1}{R^2},\quad H = -\dfrac{1}{R}.$

(Gaussova zakrivljenost je konstantna i pozitivna.)

342. $\dfrac{1}{K_1} = -1,\quad \dfrac{1}{K_2} = -1.$

343. $K_1 = \dfrac{1}{p},\quad K_2 = \dfrac{1}{q}.$

344. $\dfrac{1}{K_1} = [-xy + \sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}]\sqrt{1+x^2+y^2},$

$\dfrac{1}{K_2} = [-xy - \sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}]\sqrt{1+x^2+y^2},$

$\mu_1 = \dfrac{1+x^2}{1+y^2},\quad \mu_2 = -\dfrac{1+x^2}{1+y^2}.$

345. $K_1 = 2a,\quad K_2 = 2a.$

346. $K = -a^2, \quad H=0.$

349. $K = \dfrac{-a^2 \cos^{-2} ax \cos^{-2} ay}{(1+\mathrm{tg}^2 ax + \mathrm{tg}^2 ay)^2}, \quad K_T = -1, \quad H=0, \quad H_T=0.$

350. $K = \dfrac{-a^2}{(1+a^2u^2+a^2v^2)^2}, \quad H = -\dfrac{a^3uv}{(1+a^2u^2+a^2v^2)^{3/2}}.$

351. $K = -\dfrac{1}{9}, \quad H=0.$

352. $K = -\dfrac{4a^2b^2}{g^2}, \quad H = \dfrac{4ab}{\sqrt{g^3}}(a^2-b^2+uv)$, gdje je

$g = 4a^2b^2 + a^2(u-v)^2 + b^2(u+v)^2.$

353. Rotacionu plohu parametrizirati ovako:

$x = u\cos v, \quad y = u\sin v, \quad z = \dfrac{1}{\sqrt{a}}u, \quad u \in \mathbf{R}, \quad v \in [0, 2\pi]$. Zatim prema zad. 324.: $K_1 = 0$,

$K_2 = \dfrac{1}{z\sqrt{a^2+a}}, \quad K=0, \quad H = \dfrac{1}{2z\sqrt{a^2+a}},$

$\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 0$, pa su glavni pravci: $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$

354. $K_n = \dfrac{-ab(\mathrm{d}u^2 + \sin^2 u\,\mathrm{d}v^2)}{\sqrt{E}(E\mathrm{d}u^2 + a^2\sin^2 u\,\mathrm{d}v^2)}; \quad K_1 = \dfrac{-ab}{E\sqrt{E}}, \quad K_2 = \dfrac{-b}{a\sqrt{E}},$

$K = \left(\dfrac{b}{E}\right)^2, \quad H = -\dfrac{a^2b + bE}{2aE\sqrt{E}}$, gdje je $E = a^2\cos^2 u + b^2\sin^2 u$; jer je $F=0$, $M=0$, to su krivulje zakrivljenosti ujedno parametarske krivulje, tj. $u = \text{const.}$ – paralele i $v = \text{const.}$ – meridijani elipsoida.

355. $K_n = \dfrac{-e^{-2u}\mathrm{d}u^2 + (e^{2u}-1)\,\mathrm{d}v^2}{\sqrt{e^{2u}-1}\,(e^{2u}\mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}v^2)}; \quad K_1 = \sqrt{e^{2u}-1}, \quad K_2 = -\dfrac{1}{\sqrt{e^{2u}-1}},$

$K = -1, \quad H = \dfrac{e^{2u}-2}{2\sqrt{e^{2u}-1}}$; jer je $F=0$, $M=0$ krivulje zakrivljenosti su parametarske krivulje ($u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$), ploha se sastoji od hiperboličkih točaka.

356. Stavimo li $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, a udaljenost neke točke M pravca p od sjecišta s osi OZ sa »a«, tada je $z = a\cos\theta$, no izlazi $a = \dfrac{u}{\sin\theta}$, pa je: $\vec{r} = \{u\cos v, u\sin v, u\,\mathrm{ctg}\,\theta\}$; $u \in \mathbf{R}$, $v \in [0, 2\pi]$;

$K_1 = 0, \quad K_2 = \dfrac{\cos\theta}{u}; \quad K=0, \quad H = \dfrac{\cos\theta}{2u}.$

357 1° Prema zad. 324. mora biti srednja zakrivljenost jednaka nuli. Dolazimo time do diferencijalne jednadžbe:

$$f(f'g''-f''g')+g'(f'^2+g'^2)=0.$$

Podijelivši ovu jednadžbu s g'^2 možemo je napisati u obliku:

$$f=\frac{\mathrm{d}\left(\dfrac{f'}{g'}\right)}{\mathrm{d}u}=\frac{f'}{g'}\,\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}+\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}u}.$$

Uzmimo supstituciju:

$$\frac{f'}{g'}=t;\quad f'=tg,\quad \mathrm{d}f=t\mathrm{d}g.$$

Jednadžba tada glasi:

$$f\,\mathrm{d}t=\left(t+\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}f.$$

Separacijom varijabli dolazimo do rješenja:

$$t=\frac{\pm\sqrt{f^2-c_1^2}}{c_1}.$$

Treba još riješiti (separacijom varijabli) ovu diferencijalnu jednadžbu:

$$\frac{f'}{g'}=\frac{\pm\sqrt{f^2-c_1^2}}{c_1},\quad \text{odnosno}\quad \mathrm{d}g=\pm\frac{c_1\,\mathrm{d}f}{\sqrt{f^2-c_1^2}}.$$

Rješenje glasi:

$$g=\pm c_1\,\mathrm{ar\,ch}\,\frac{f}{c_1}+c_2.$$

Traženo rješenje predstavlja familiju rotacionih ploha:

$$x=f(u)\cos v,\quad y=f(u)\sin v,\quad z=\pm c_1\,\mathrm{ar\,ch}\,\frac{f(u)}{c_1}+c_2,\quad u\in\mathbf{R},\quad v\in[0,2\pi].$$

Usporedivši to sa zad. 221. a) plohu možemo napisati i pomoću funkcije g, uzmemo li da je $f(u)$ izraženo eksplicite pomoću g:

$$f=c_1\,\mathrm{ch}\,\frac{\bar{c}_2\pm g}{c_1},$$

$$x=c_1\,\mathrm{ch}\,\frac{\bar{c}_2\pm g}{c_1}\cos v,\quad y=c_1\,\mathrm{ch}\,\frac{\bar{c}_2\pm g}{c_1}\sin v;\quad z=g(u),\quad u\in\mathbf{R},\quad v\in[0,2\pi].$$

2° Treba staviti $f(u)=u$; rješenje diferencijalne jednadžbe: $ug''+g'(1+g'^2)=0$ jest:

$g=\pm c_1\,\mathrm{arch}\,\dfrac{u}{c_1}+c_2$. Ploha je katenoid:

$$x=u\cos v,\quad y=u\sin v,\quad z=\pm c_1\,\mathrm{arch}\,\frac{u}{c_1}+c_2,\quad u\in\mathbf{R},\quad v\in[0,\pi].$$

3° Treba staviti $g(u)=u$; rješenje diferencijalne jednadžbe:

$$1+f'^2-ff''=0\quad\text{jest:}\quad f=c_1\,\mathrm{ch}\,\frac{c_2\pm u}{c_1}.$$

Ploha je također katenoid:

$$x=c_1\,\mathrm{ch}\,\frac{c_2\pm u}{c_1}\cos v,\quad y=c_1\,\mathrm{ch}\,\frac{c_2\pm u}{c_1}\sin v,\quad z=u,\quad u\in\mathbf{R},\quad v\in[0,2\pi].$$

358. $E=f'^2,\quad G=f'^2+g'^2,\quad F=0,\quad L=0,\quad M=-\dfrac{fg'}{\sqrt{f'^2+g'^2}},$

$$N=\frac{fg''}{\sqrt{f'^2+g'^2}}.\quad H=0 \text{ za } EN-2FM+LG=0.$$

Jer je $F=0$, $L=0$, mora biti $N=0$. To nam daje diferencijalnu jednadžbu: $g''=0\,(f\neq 0)$. Rješenje jest: $g=c_1v+c_2$. Za $f(u)=c$ u ploha je helikoid.

359. 1. Za rotacioni elipsoid: $K=-\dfrac{c^2}{(a^2\cos^2 u+c^2\sin^2 u)^2}$;

2. Za kružni valjak: $K=0$; 3. Za kružni stožac: $K=0$;

4. Za jednoplošni rotacioni hiperboloid:

$$K=-\frac{c^2}{(a^2\,\mathrm{sh}^2 u+c^2\,\mathrm{ch}^2 u)^2};$$

5. Za dvoplošni rotacioni hiperboloid:

$$K=\frac{c^2}{(a^2\,\mathrm{ch}^2 u+c^2\,\mathrm{sh}^2 u)^2};$$

6. Za rotacioni paraboloid: $K=\dfrac{4}{(a^2+4u^2)^2}$;

7. Za tours: $K=\dfrac{\cos u}{b\,(a+b\cos u)}$;

8. Za pseudosferu: $K=-\dfrac{1}{a^2}$; 9) Za katenoid: $K=-\dfrac{1}{a^2\,\mathrm{ch}^4\dfrac{u}{a}}$.

361. Diferencijalna jednadžba krivulje zakrivljenosti za plohu $z=f(x,y)$ glasi:

$$\begin{vmatrix} \mathrm{d}y^2 & -\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y & \mathrm{d}x^2 \\ 1+q^2 & pq & 1+p^2 \\ t & s & r \end{vmatrix}=0,$$

pa je:

$$\ln(ay+\sqrt{1+a^2y^2})\pm\ln(ax+\sqrt{1+a^2x^2})=\text{const.}$$

362. Meridijani i paralele ($u=c_1$, $v=c_2$).

363. Koordinatne krivulje (paralele i meridijani, koji su izvodnice valjka).

364. Koordinatne krivulje (izvodnice stošca i njihove ortogonalne trajektorije).

365. Koordinatne krivulje.

366. $y=c_1x;\qquad x^2+y^2=c_2.$

367. Najprije, prema zad. 317. i 341. zaključujemo da je u svakoj točki ravnine i sfere svaki smjer μ ujedno i glavni smjer, jer je jednadžba glavnih smjerova (12):

$$\begin{vmatrix} \mu^2 & -\mu^2 & 1 \\ G & F & E \\ N & M & L \end{vmatrix}=0$$

identički zadovoljena, tj. identički je jednaka nuli. Nadalje, kako je (glavna) krivulja zakrivljenosti takva krivulja, kod koje je tangenta paralelna s jednim od dva glavna smjera μ_1 i μ_2, to izlazi da je krivulja zakrivljenosti sfere i ravnine paralelna sa svakim smjerom, odnosno svaka krivulja ravnine i sfere je ujedno i krivulja zakrivljenosti.

368. Vidjeti prvi dio zad. 367.

370. $E = G = 9\,(1 + u^2 + v^2)^2$; $L = -N = -6$, $F = M = 0$.

371. Naći $p, q, r, s, t,$ pa su krivulje zakrivljenosti dane jednadžbom:

$$\begin{vmatrix} dx^2 & -dx\,dy & dy^2 \\ \dfrac{b^4 z^2 + c^4 y^2}{b^4} & \dfrac{c^4 xy}{a^2 b^2} & \dfrac{a^4 z^2 + c^4 x^2}{a^4} \\ a^2 - x^2 & xy & b^2 - y^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Razriješimo li determinantu, stavimo umjesto z vrijednosti iz jednadžbe elipsoida, pa nakon skraćivanja jednadžbe $s(a^2 b^2 - b^2 x^2 - a^2 y^2)$ i uz oznake: $\alpha = b^2 - c^2$, $\beta = c^2 - a^2$, $\gamma = a^2 - b^2$ dobivamo diferencijalnu jednadžbu za krivulje zakrivljenosti:

$$b^2 \beta xy dx^2 - (b^2 \beta x^2 + a^2 \alpha y^2 + a^2 b^2 \gamma)\, dxdy + a^2 \alpha xy dy^2 = 0.$$

(Ovu diferencijalnu jednadžbu prvi je riješio Monge.)

372. $ds^2 = \left(1 + \dfrac{x^2}{p^2}\right) dx^2 + \dfrac{2xy}{pq}\, dx\,dy + \left(1 + \dfrac{y^2}{q^2}\right) dy^2$;

$$\mathrm{II} = \frac{1}{pq\sqrt{1 + \dfrac{x^2}{p^2} + \dfrac{y^2}{q^2}}}\,[q\,dx^2 + p\,dy^2];$$

$$K = \frac{1}{pq\left(1 + \dfrac{x^2}{p^2} + \dfrac{y^2}{q^2}\right)^2}\;; \quad H = \frac{p + q + \dfrac{x^2}{p} + \dfrac{y^2}{q}}{2pq\left(1 + \dfrac{x^2}{p^2} + \dfrac{y^2}{q^2}\right)^{3/2}};$$

krivulje zakrivljenosti dobijemo kao rješenje diferencijalne jednadžbe:

$$qxy\,dx^2 + [pq(q-p) + py^2 - qx^2]\,dx\,dy - pxy\,dy^2 = 0.$$

373. $x = c_1$, $y = c_2$ (koordinatne krivulje).

374. $u = c_1$, $u - 2v = c_2$.

375. $u + v = c_1$, $u - v = c_2$.

376. $u = c_1 e^{v\sqrt{2}}$; $u = c_2 e^{-u\sqrt{2}}$.

379. $v = c, \quad u = \dfrac{c\sqrt{\operatorname{ch} v} - \sqrt{\operatorname{sh} v}}{c\sqrt{\operatorname{ch} v} - \sqrt{\operatorname{sh} v}}$.

378. $v = c_1 + \ln \operatorname{tg} \dfrac{u}{2}$, $\quad v = c_2 - \ln \operatorname{tg} \dfrac{u}{2}$.

379. $u = c_2$; druga asimptotska linija ima implicitnu jednadžbu:

$u(u^2 + v)^2 - c_2^2 v^2 = 0$, a dobije se kao rješenje Bernoullijeve diferencijalne jednadžbe:

$$2u^3 \frac{dv}{du} - 5u^2 v - v^2 = 0.$$

380. a) diferencijalna jednadžba asimptotskih krivulja rotacione plohe glasi: $(f'g'' - f''g')\,\mu^2 + fg' = 0$;